

A talpponti háromszög kerülete és területe

A feladat

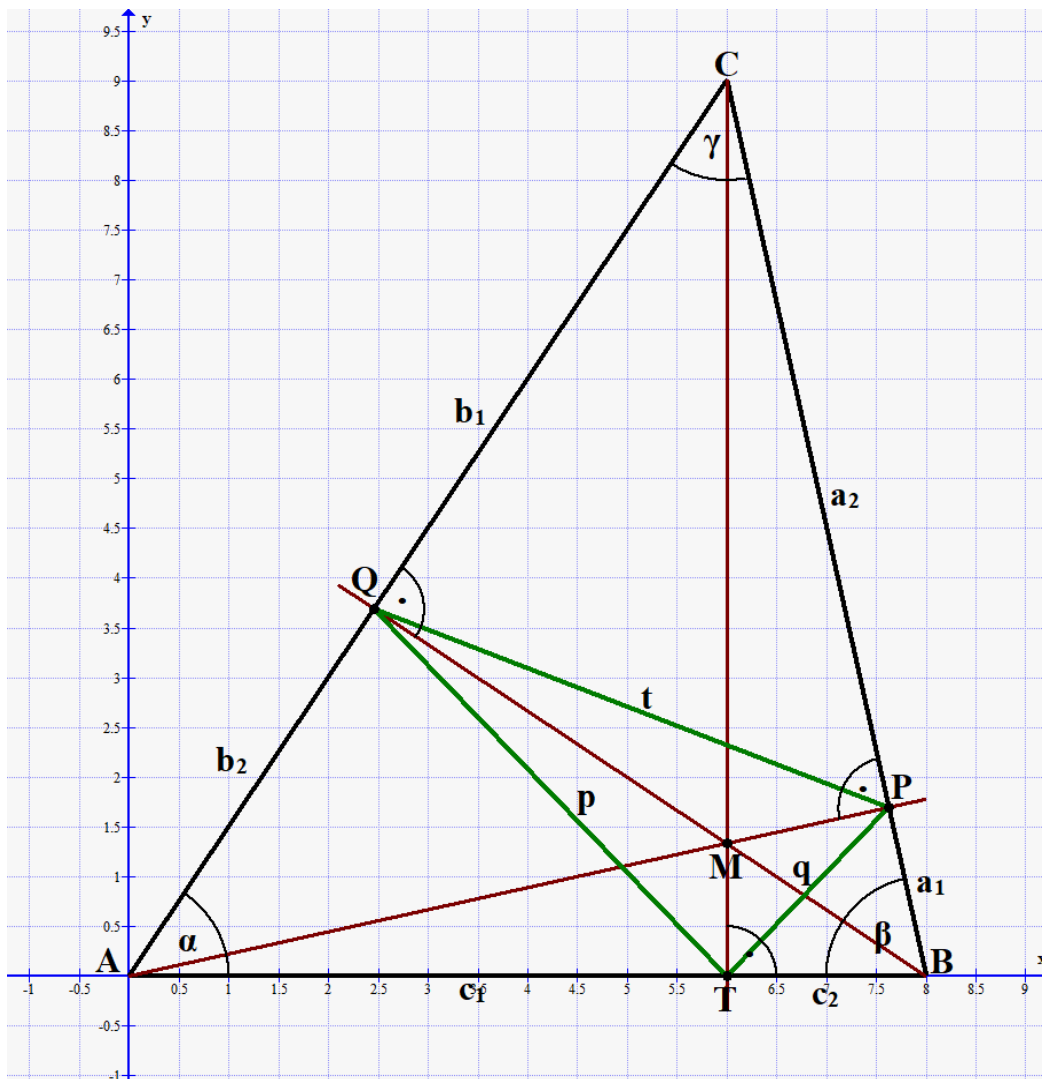
Adott az ABC hegyesszögű háromszög, a , b , c oldalaival.
Határozzuk meg talpponti háromszögének kerületét és területét!

A megoldás

Értelmezés – [1] – :

A hegyesszögű háromszög talpponti háromszöge a magasságok talppontjai alkotta három - szög.

A részletezéshez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Eszerint a **PQT** talpponti háromszög oldalai **p**, **q**, **t**. Ha ezek ismertek, akkor ~ a kerülete, az oldalak összegeként:

$$K_{talp} = p + q + t ; \quad (1)$$

~ a területe *Hérón* képletével:

$$T_{talp} = \sqrt{s^* \cdot (s^* - p) \cdot (s^* - q) \cdot (s^* - t)} , \quad s^* = \frac{p + q + t}{2} = \frac{K_{talp}}{2} \quad (2)$$

áll elő. Ezek szerint a fő feladat **p**, **q**, **t** előállítás.

Megint az 1. ábra szerint:

$$a = a_1 + a_2 , \quad a_1 = c \cdot \cos \beta , \quad a_2 = b \cdot \cos \gamma ; \quad (3)$$

$$b = b_1 + b_2 , \quad b_1 = a \cdot \cos \gamma , \quad b_2 = c \cdot \cos \alpha . \quad (4)$$

$$c = c_1 + c_2 , \quad c_1 = b \cdot \cos \alpha , \quad c_2 = a \cdot \cos \beta . \quad (5)$$

Most koszinusztétellel:

$$\begin{aligned} p^2 &= b_2^2 + c_1^2 - 2 \cdot b_2 \cdot c_1 \cdot \cos \alpha , \\ p^2 &= c^2 \cdot \cos^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha - 2 \cdot c \cdot \cos \alpha \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha , \\ p^2 &= \cos^2 \alpha \cdot (c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha) = \cos^2 \alpha \cdot a^2 , \text{ tehát:} \\ p^2 &= a^2 \cdot \cos^2 \alpha \rightarrow p = a \cdot \cos \alpha . \end{aligned} \quad (6)$$

Hasonlóan kapjuk, hogy:

$$q = b \cdot \cos \beta , \quad (7)$$

$$t = c \cdot \cos \gamma . \quad (8)$$

Ismét koszinusztétellel:

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \rightarrow \\ p &= a \cdot \cos \alpha = a \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = a^2 \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} , \text{ tehát:} \\ p &= a^2 \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} . \end{aligned} \quad (9)$$

Teljesen hasonlóan:

$$q = b^2 \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} , \quad (10)$$

$$t = c^2 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} . \quad (11)$$

Így (1), (9), (10) és (11) szerint:

$$K_{talp} = a^2 \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} + b^2 \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} + c^2 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} ,$$

$$K_{talp} = \frac{1}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} \cdot [a^2 \cdot (-a^2 + b^2 + c^2) + b^2 \cdot (a^2 - b^2 + c^2) + c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)] . (12)$$

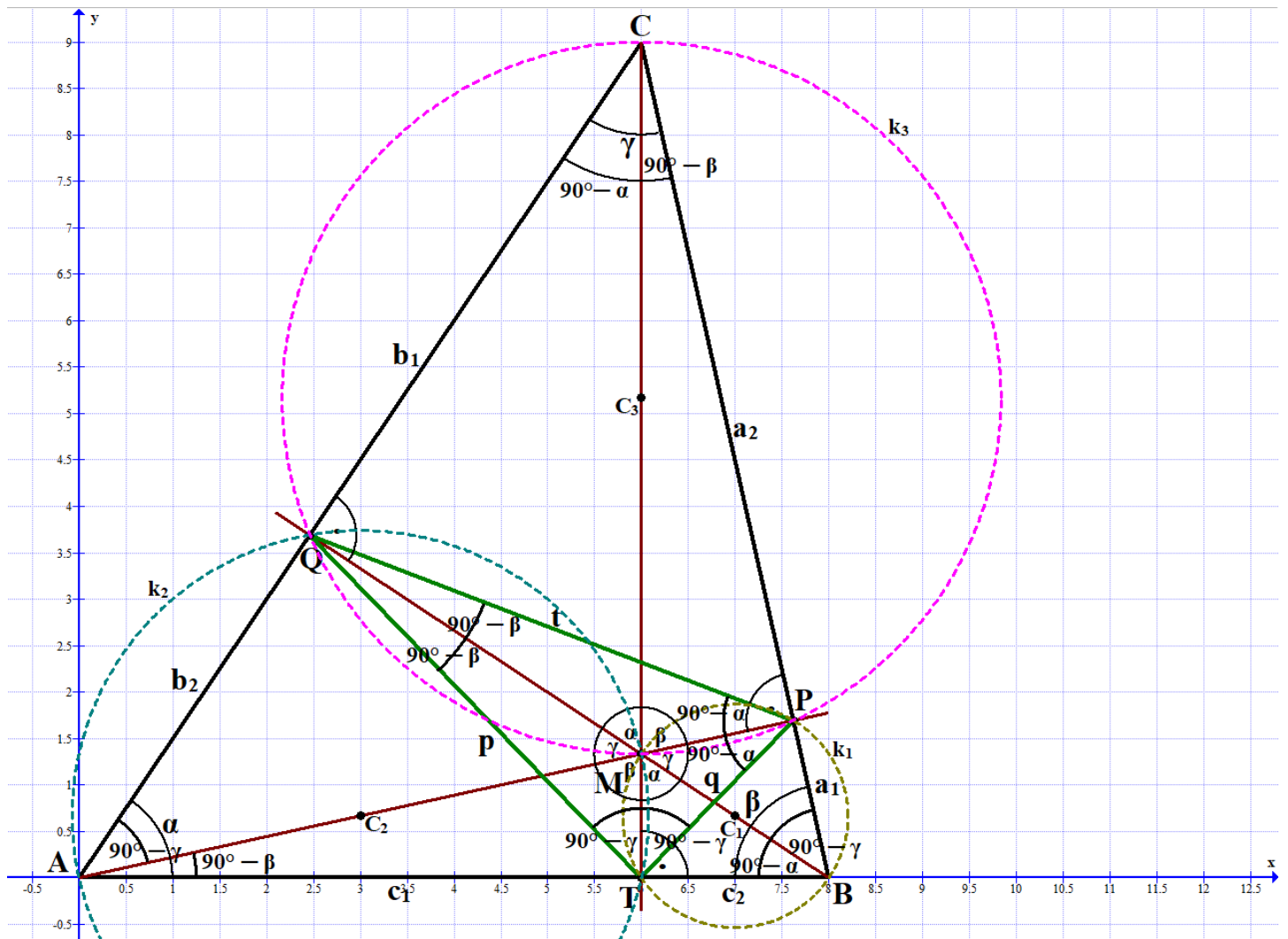
Majd (2), (9), (10) és (11) szerint kapjuk a területet is.

Ennek (esetleges) részletezését már rábizzuk az érdeklődő Olvasóra.

Megjegyzések:

M1. Elég sok közölnivalónk van a talpponti háromszög kapcsán.

Most tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Minthogy húrnégyszögekről van szó, az elrendezésre három *Thalész* - kör is rajzolható. A szögek számbavételekor az azonos kör egy adott ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlőségét használtuk fel, egyebek mellett.

A szögviszonyok olyanok, hogy az **ABC** háromszög magasságvonalai egyben a **PQT** talponti háromszög szögfelezői is. Minthogy a talpponti háromszögbe írható kör középpontja szögfelezőinek metszéspontja, így a magasságvonalak metszéspontja is.

A talpponti háromszögbe beírt kör sugara az ismert képlettel:

$$r = \frac{T_{talp}}{s^*} . \quad (13)$$

A talpponti háromszög belső szögei a 2. ábra szerint:

$$\varphi_P = 180^\circ - 2 \cdot \alpha , \quad \varphi_Q = 180^\circ - 2 \cdot \beta , \quad \varphi_T = 180^\circ - 2 \cdot \gamma . \quad (14)$$

Ezek összege:

$$\varphi_P + \varphi_Q + \varphi_T = 3 \cdot 180^\circ - 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 3 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = 180^\circ , \quad (15)$$

ahogyan az várható is volt.

M2. Most számszerűen kidolgozunk egy példát.

SZÁMPÉLDA

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!

Adatok:

$$a = \sqrt{2^2 + 9^2} \text{ cm} = 9,21954 \text{ cm} ; \quad (a)$$

$$b = \sqrt{6^2 + 9^2} \text{ cm} = 10,81665 \text{ cm} ; \quad (b)$$

$$c = 8 \text{ cm} . \quad (c)$$

$$\cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{8^2 + (6^2 + 9^2) - (2^2 + 9^2)}{2 \cdot \sqrt{6^2 + 9^2} \cdot 8} = 0,554700 \rightarrow \alpha = 56,3099^\circ ; \quad (d)$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(2^2 + 9^2) + 8^2 - (6^2 + 9^2)}{2 \cdot \sqrt{2^2 + 9^2} \cdot 8} = 0,216930 \rightarrow \beta = 77,4712^\circ ; \quad (e)$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{(2^2 + 9^2) + (6^2 + 9^2) - 8^2}{2 \cdot \sqrt{2^2 + 9^2} \cdot \sqrt{6^2 + 9^2}} = 0,691905 \rightarrow \gamma = 46,2189^\circ . \quad (f)$$

Ellenőrzés:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ ? \rightarrow 56,3099^\circ + 77,4712^\circ + 46,2189^\circ = 180^\circ . \quad \odot$$

A talpponti háromszög oldalai:

$$p = a \cdot \cos \alpha = 9,21954 \text{ cm} \cdot 0,554700 = 5,11408 \text{ cm} ; \quad (\text{g})$$

$$q = b \cdot \cos \beta = 10,81665 \text{ cm} \cdot 0,216930 = 2,34646 \text{ cm} ; \quad (\text{h})$$

$$t = c \cdot \cos \gamma = 8 \text{ cm} \cdot 0,691905 = 5,53524 \text{ cm} . \quad (\text{i})$$

A talpponti háromszög kerülete:

$$K_{talp} = p + q + t = 5,11408 \text{ cm} + 2,34646 \text{ cm} + 5,53524 \text{ cm} = 12,99578 \text{ cm} ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{K_{talp} \cong 13 \text{ cm} .}} \quad (\text{j})$$

A talpponti háromszög területéhez:

$$s^* = \frac{p + q + t}{2} = \frac{K_{talp}}{2} = \frac{12,99578 \text{ cm}}{2} = 6,49789 \text{ cm} . \quad (\text{k1})$$

$$s^* - p = 6,49789 \text{ cm} - 5,11408 \text{ cm} = 1,38381 \text{ cm} ; \quad (\text{k2})$$

$$s^* - q = 6,49789 \text{ cm} - 2,34646 \text{ cm} = 4,15143 \text{ cm} ; \quad (\text{k3})$$

$$s^* - t = 6,49789 \text{ cm} - 5,53524 \text{ cm} = 0,96265 \text{ cm} . \quad (\text{k4})$$

Ezekkel a terület:

$$\begin{aligned} T_{talp} &= \sqrt{s^* \cdot (s^* - p) \cdot (s^* - q) \cdot (s^* - t)} = \\ &= \sqrt{6,49789 \cdot 1,38381 \cdot 4,15143 \cdot 0,96265} \text{ cm}^2 = 5,9946 \text{ cm}^2 \cong 6 \text{ cm}^2 , \end{aligned}$$

tehát:

$$\underline{\underline{T_{talp} \cong 6 \text{ cm}^2 .}} \quad (\text{k})$$

A talpponti háromszögbe beírt kör sugara:

$$r = \frac{T_{talp}}{s^*} = \frac{5,9946 \text{ cm}^2}{6,4979 \text{ cm}} = 0,9225 \text{ cm} \cong 0,923 \text{ cm} ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{r \cong 0,923 \text{ cm} .}} \quad (\text{l})$$

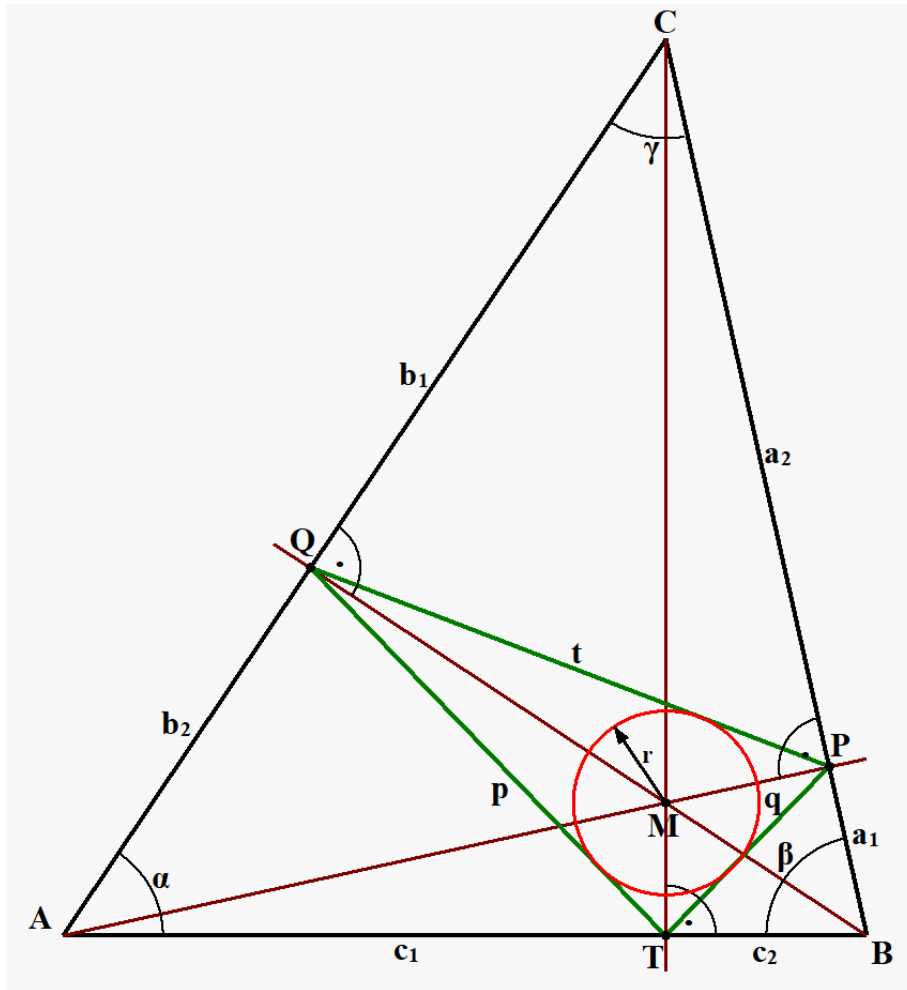
A talpponti háromszög szögei:

$$\varphi_P = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = 180^\circ - 2 \cdot 56,3099^\circ = 67,3802^\circ \cong 67,4^\circ ; \quad (\text{m})$$

$$\varphi_Q = 180^\circ - 2 \cdot \beta = 180^\circ - 2 \cdot 77,4712^\circ = 25,0576^\circ \cong 25,0^\circ ; \quad (\text{n})$$

$$\varphi_T = 180^\circ - 2 \cdot \gamma = 180^\circ - 2 \cdot 46,2189^\circ = 87,5622^\circ \cong 87,6^\circ . \quad (\text{o})$$

Az eredmény a 3. ábrán látható.



3. ábra

M3. Az [1] munkában megemlítik (igazolás nélkül), hogy a hegyesszögű háromszögbe írható háromszögek közül a talpponti háromszögnek a legkisebb a *kerülete*. Ennek rész - leteihez lásd [2]!

M4. A talpponti háromszög tulajdonságaival részletesen foglalkozik a [3] mű.

Ebben választ kapunk olyan, itt fel sem tett kérdésekre is, mint hogy hogyan viszonyulnak egymáshoz a talpponti háromszög és az eredeti háromszög kerülete és területe. Ehhez:

$$\frac{K_{talp}}{K} = \frac{p + q + t}{a + b + c} = \frac{a \cdot \cos \alpha + b \cdot \cos \beta + c \cdot \cos \gamma}{a + b + c}, \quad (16)$$

$$\frac{T_{talp}}{T} = \sqrt{\frac{s^* \cdot (s^* - p) \cdot (s^* - q) \cdot (s^* - t)}{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}}, \quad s^* = \frac{p + q + t}{2} = \frac{K_{talp}}{2}, \quad s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{K}{2}. \quad (17)$$

M5. Ha itt valamelyik képlet nem ismerős, úgy [4] - ben bizonyára megtalálható.

M6. Belátjuk, a (12) képlet szerinti felírás kissé haszontalan. Ugyanis a valóságban ha - sonlóan járunk el a számpéldában követett úthoz. Ennek egyik oka a zsebszámológép használatának akadályai, másrészt kényelmi szempontok. A területképlet kifejtését éppen

ezért nem erőltettük.

Források:

- [1] – Főszerk.: ***Gerőcs László ~ Vancsó Ödön***: Matematika
Akadémiai Kiadó, Budapest, 2010.
- [2] – ***H. S. M. Coxeter***: A geometriák alapjai
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- [3] – ***Göndör András***: Nagy tételkönyv, 1. kötet
Scolar Kiadó, Budapest, 2005.
- [4] – ***I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev***: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2024. 08. 31.

Továbbiak: www.galgoczi.net